Fonctions convexes.

TTU $\rightarrow$ 3 pentes : $P_{ab} \leqslant P_{ac} \leqslant P_{bc}$ pour f convexe et $P_{xy} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$\rightarrow$ f convexe $\Rightarrow \forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

$\rightarrow$ f convexe $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ croissante

$\rightarrow$ f convexe $\Rightarrow$ f continue sur l'intérieur de son ~~intérieur~~ domaine de def.

$\rightarrow$ $f \in \Delta^1(I, \mathbb{R}) \Rightarrow \forall a \in I \ \forall x \in I \quad f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$

$\rightarrow$ $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \Rightarrow \forall x_1, \dots, x_n \in I : f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum \lambda_i f(x_i)$
(inégalité stricte si f strict. convexe)

$\rightarrow$ IAG : $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$

$\rightarrow$ Hölder : $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ $\forall (x_i), (y_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$

(idée de preuve : Mq $xy \leqslant \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} x^q$ puis appliquer pour $\frac{x_i}{A}$ et $\frac{y_i}{B}$ pour $A = \left(\sum_1^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ et $B = \left(\sum_1^n |y_i|^q\right)^{1/q}$)

$\rightarrow$ Hölder pour les intégrales : $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q} \geqslant \left|\int_a^b fg\right|$

Hölder [illegible]

→ ~~Minkowski~~ : $(x_i),(y_i) \in \mathbb{R}^{+m}$: $\left(\sum_{i=1}^{m} (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^p\right)^{1/p}$

([illegible])

→ Jensen : g convexe et f $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ $\exists (\varphi_i)_{i\in\Lambda}$ affines $g = \sup_{i\in\Lambda} \varphi_i$

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f$$

→ f convexe : $f(E(X)) \leqslant E(f\circ X)$

C.S $|E(XY)| \leqslant E(X^2)^{1/2} E(Y^2)^{1/2}$

Hölder $\leqslant E(|X|^p)^{1/p} E(|Y|^q)^{1/q}$